EXERCICE N°5 :	30'	4 points	

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

1°) a) Montrer que f est dérivable sur IR et dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer les branches infinies à C.

c) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (v_n) la suite définie sur IN^* par : $v_n=\int_0^n f(x)\,dx$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a : $v_n=2-(2+n)e^{-n}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3°) Pour tout $k\in IN^*$, on pose : $U_k=\int_{k-1}^{k} f(x)dx$.

Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}U_k$.

4°) a) Montrer que pour tout $k\in IN^*$; $U_k=(e-1)\,k\,e^{-k}+(e-2)e^{-k}$.

b) En déduire que pour tout $n\in IN^*$; on a : $v_n=(e-1)\sum\limits_{k=1}^{n}k e^{-k}+\dfrac{e-2}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)$

5°) Soit (S_n) la suite définie sur IN^* par : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k e^{-k}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n=\dfrac{e}{(e-1)^2}$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn